Проблемы физики, математики и техники, № 1 (2), 2010

УДК 517.9

ВРЕМЕННЫЕ СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

В.И. Мироненко

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

THE SYMMETRIES OF RICCATI EQUATION

V.I. Mironenko

F. Scorina Gomel State University, Gomel

Теория отражающей функции применяется к изучению дифференциального уравнения Риккати.

Ключевые слова: *дифференциальное уравнение, периодическое решение, отображение за период.*

The theory of reflecting function is applied to investigate Riccati equation.

Keywords: *differential equation, periodic solution, in period-transformation.*

Введение

Детерминированные системы с конечным числом степеней свободы описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом если система изолирована, то она описывается автономной дифференциальной системой. Если же на систему оказывается периодическое внешнее воздействие, то эта система описывается дифференциальной системой с периодической по времени правой частью. Изучение автономной системы вблизи предельного цикла (периодического режима функционирования изолированной системы) также приводит к необходимости исследования дифференциальных систем с периодической правой частью. Основоположники качественной теории дифференциальных уравнений А. Пуанкаре и А.М. Ляпунов создали ряд эффективных методов исследования периодических дифференциальных систем. Эти методы, несмотря на сложность их применения, прекрасно работают в так называемых неособенных случаях. Практика изучения реальных систем приводит, однако, к необходимости рассмотрения и особенных случаев, когда приходится изыскивать другие методы. При этом, как всегда, наличие симметрий в системе облегчает ее исследование. Увидеть облегчающие исследования симметрии, к сожалению, не всегда просто. Автор этих строк попытался указать методы, позволяющие осуществлять нахождение указанных симметрий. Таким образом, он пришел к понятию отражающей функции [1].

Для дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x), \quad t \in R, \quad x \in D \subset R^n \tag{0.1}$$

отражающая функция $F(t,x)$ определяется равенством $F(t,x) := \varphi(-t,t,x)$, где $\varphi(t;t_0,x_0)$ есть общее решение в форме Коши системы (0.1). При этом мы обычно предполагаем, что правая часть системы (0.1) есть непрерывно дифференцируемая в области задания системы функция.

В том случае, когда $X(t,x)$ является 2ω-периодической по t функцией $F(-\omega,x) \equiv \equiv \varphi(\omega;-\omega,x)$, есть так называемое отображение Пуанкаре или отображение за период. Здесь важно предупредить читателя, что в нарушение традиции мы рассматриваем отображение за период $[-\omega;\omega]$, а не как обычно за период $[0;2\omega]$. Так как отображение за период определяется через общее решение системы (0.1), то создается впечатление, что для неинтегрируемой в квадратурах системы отображение Пуанкаре найти нельзя.

Но мы определили отображение за период $[-\omega;\omega]$ через отражающую функцию. Вдумчивый читатель сразу же заметит, что отражающая функция так же определяется через общее решение системы (0.1). Для отражающей функции, однако, верно основное соотношение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} X(t,x) + X(-t,F) = 0, \quad F(0,x) \equiv x. \tag{0.2}$$

Причем функция $F(t,x)$ является отражающей функцией для системы (0.1) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет соотношениям (0.2). Природа соотношения (0.2) более сложная, чем самой системы (0.1). Нам, однако, нужны не все решения системы (0.1), а лишь одно, которое иногда удается найти. Эта ситуация напоминает нам ситуацию с интегрирующим множителем. В частности, если $X(-t,x) \equiv -X(t,x)$, то легко убедиться в том, что отражающая функция системы (0.1) имеет вид $F(t,x) \equiv x$. Это значит, что для 2ω-периодической и нечетной по t функции $X(t,x)$

отображение за период $[-\omega, \omega]$ системы (0.1) есть тождественное отображение. В этом случае все продолжимые на $[-\omega, \omega]$ решения системы (0.1) 2ω-периодичны и четны по t [1, с. 13].

Пользуясь основным соотношением (0.2), мы можем устанавливать условия, при которых система (0.1) имеет отражающую функцию заданного вида, и решать другие задачи аналогичного характера. Соответствующие примеры читатель найдет в [1]–[2], а также в [3]–[13].

В работах [12]–[13] указан другой подход, позволяющий для данной системы (0.1) находить другие системы с тем же отображением за период $[-\omega; \omega]$, что и у исходной системы (0.1). Этот подход основан на теореме из [10], согласно которой все системы вида

$$\frac{dx}{dt} = X(t,x) + \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(t)\Delta_i(t,x),$$

где $\alpha_i(t)$ – нечетные скалярные функции, а $\Delta_i(t,x)$ вектор – функции, являющиеся решениями системы

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} + \frac{\partial \Delta}{\partial x} X(t,x) - \frac{\partial X}{\partial t}(t,x)\Delta = 0,$$

имеют одну и ту же отражающую функцию. Точнее следует сказать, что отражающие функции двух таких систем совпадают на пересечении областей задания этих отражающих функций.

Задавая отражающую функцию, следует иметь в виду, что дифференцируемая функция $F(t,x)$ может быть отражающей функцией тогда и только тогда, когда для нее выполнены тождества $F(-t, F(t,x)) \equiv F(0,x) \equiv x.$ Всякое соотношение вида $U(-t,F) = U(t,x),$ разрешимое относительно F, задает такую функцию.

Знание отражающей функции одной системы позволяет строить отражающие функции всех систем, получаемых из данной с помощью замен переменных. Доказываемая ниже теорема дает соответствующий пример.

Понятие отражающей функции использовалось в работах Л.А. Альсевич, П.П. Вересовича, О.А. Кастрицы, С.В. Майоровской, В.В. Мироненко, Э.В. Мусафирова, С.Л. Соболевского, В.Ф. Филипцова, Zhou Zhengxin, Zhang Shanlin, Yu Yuanhong, Yan Yuexin для изучения свойств решений дифференциальных систем (см. например [3]–[13]). В монографии [2] указаны доступные автору работы, опубликованные до 2000 года и использующие понятие отражающей функции. С основными результатами автора по отражающей функции читатель может ознакомиться на сайте www.reflecting-function.narod.ru.

1 Основной результат работы

В этой работе понятие отражающей функции применяется к изучению периодических уравнений Риккати. В дальнейшем для каждой функции $n(t)$ использованы обозначения

$$\left[n(t)\right]_{evn} := \frac{n(t)+n(-t)}{2},$$

$$\left[n(t)\right]_{odd} := \frac{n(t)-n(t)^2}{2}, \quad \overline{m} := m(-t).$$

Основной результат работы содержит следующая

Теорема. *Пусть для дифференцируемых 2ω-периодических коэффициентов дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = a_0(t) + a_1(t)(x - m(t)) + a_2(t)(x - m(t))^2 \quad (1.1)$$

выполнены условия:

1. *Функцию $\dot{m} - a_0$ можно представить в виде $\dot{m} - a_0 = \alpha_0 b$, где $\alpha_0(t)$ нечетная непрерывная 2ω-периодическая функция, а $b(t) \neq 0$ при всех $t \in R.$*

2. *Функция* $\alpha = \dfrac{1}{2\alpha_0}\left[\dfrac{\dot{b}}{b} - a_1\right]_{evn}$ *доопределяется до непрерывной на R нечетной функции, которая удовлетворяет соотношению*

$$\dot{\alpha} - \alpha\left[\frac{\dot{b}}{b} - a_1\right]_{odd} = [ba_2]_{evn}.$$

Тогда:

1) *отражающая функция дифференциального уравнения* (1.1) *задается формулой*

$$F(t,x) = \frac{(\overline{b} + 2\alpha\overline{m})x + b\overline{m} - \overline{b}m - 2\alpha m\overline{m}}{2\alpha x + (b - 2\alpha m)};$$

2) *все продолжимые на* $[-\omega; \omega]$ *решения дифференциального уравнения* (1.1) *являются* 2ω*-периодическими.*

*Доказательство***.** Прежде всего, отметим для функции $u := \alpha + \dfrac{b}{x-m}$ справедливость следующей цепочки равенств:

$$\dot{u} = \dot{\alpha} + \frac{\dot{b}}{x-m} + \frac{b\dot{m}}{(x-m)^2} - \frac{b\dot{x}}{(x-m)^2} =$$

$$= \frac{b(\dot{m} - a_0)}{(x-m)^2} + \frac{(\dot{b} - ba_1)}{x-m} + (\dot{\alpha} - ba_2) =$$

$$= \frac{\dot{m} - a_0}{b}(u-\alpha)^2 + \left(\frac{\dot{b}}{b} - a_1\right)(u-\alpha) + (\dot{\alpha} - ba_2),$$

откуда, в свою очередь, следует соотношение

$$\dot{u} = \alpha_0 u^2 + \left(\frac{\dot{b}}{b} - a_1 - 2\alpha\alpha_0\right)u +$$

$$+\left(\dot{\alpha} - ba_2 + \alpha_2\alpha^2 - \alpha\left(\frac{\dot{b}}{b} - a_1\right)\right),$$

т.е., имеет место равенство

$$\dot{u} = \alpha_0 u^2 + \alpha_1 u + \alpha_2,$$

где α_0 – нечетна по условию теоремы, а

$$\alpha_1 := \frac{\dot{b}}{b} - a_1 - 2\alpha\alpha_0 =$$

$$= \left[\frac{\dot{b}}{b} - a_1\right]_{evn} - 2\alpha\alpha_0 + \left[\frac{\dot{b}}{b} - a_1\right]_{odd} = \left[\frac{\dot{b}}{b} - a_1\right]_{odd}$$

есть нечетная функция.

Функция

$$\alpha_2 := \dot{\alpha} - \alpha\left(\frac{\dot{b}}{b} - a_1\right) - ba_2 + \alpha_2\alpha^2$$

в силу второго условия теоремы также нечетна. Таким образом, для любого продолжимого на $[-\omega;\omega]$ решения $x(t)$ дифференциального уравнения (1.1) функция $u(t)$ в силу [1, с. 13] есть четная функция. Поэтому

$$\alpha + \frac{b}{x-m} = -\alpha + \frac{\overline{b}}{\overline{x} - \overline{m}}.$$

Выражая из этого соотношения $\overline{x}$, получим отражающую функцию дифференциального уравнения (1.1). Так как функция $\alpha(t)$ нечетна и 2ω-периодична, то имеет место равенство $\alpha(-\omega) = 0$. Поэтому, согласно [1, с. 12], отображение за период удовлетворяют соотношению $F(-\omega, x) = x$.

Отсюда и из [12, с. 12] следует утверждение теоремы.

Замечание. При практическом использовании этой теоремы возникают определенные трудности в подборе функций $b(t)$ и $m(t)$. В связи с этим предлагается считать

$$b(t) := b_o e^{\int_0^t a_1(\tau)d\tau},$$

$$\alpha(t) := \int_0^t b(\tau)a_2(\tau)d\tau,$$

$$\alpha_0(t) := \frac{1}{2\alpha(t)}\left[\frac{\dot{b}(t)}{b(t)} - a_1(t)\right]_{evn},$$

$$m(t) = m_0 + \int_0^t \left[a_0(\tau) + \alpha_0(\tau)b(\tau)\right]d\tau,$$

где b_0 и m_0 — постоянные. При этом все условия теоремы могут быть выполнены, а функция $\alpha(t)$ может оказаться непериодической. Тогда заключение теоремы о периодичности решений уравнений (1.1), конечно, не будет верным. Знание же отражающей функции этого уравнения позволяет указать отображение за период для исследуемого уравнения (1.1) и тем самым найти начальные данные 2ω-периодических решений, если таковые существуют.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений / В.И. Мироненко. – Минск : Университетское, 1986. – 76 с.
2. *Мироненко, В.И.* Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В.И. Мироненко – Гомель : УО «ГГУ» им. Ф Скорины», 2004. – 196 с.
3. *Мусафиров, Э.В.* О простоте линейных дифференциальных систем / Э.В. Мусафиров // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38. – № 4. – С.570–572.
4. *Musafirov, E.V.* Differential systems, the mapping over period for which is represented by a product of three exponential matrixes / E.V. Musafirov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – Vol. 329. – P. 647–654.
5. *Musafirov, E.V.* Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter / E.V. Musafirov // Indian Journal of Mathematics. – 2008. –Vol. 50, № 1. – P. 63–76.
6. *Zhengxin, Z.* On the Poincare mapping and periodic solutions of nonautonomous differential systems / Z. Zhengxin // Commun. Pure Appl. Anal. – 2007. – Vol. 6, № 2. – P. 541–547.
7. *Shanlin, Z.* On the equivalence of the Abel equation / Z. Shanlin, Z. Zhengxin // Ann. Differ. Equations. – 2006. – Vol. 22, № 3. – P. 461–466.
8. *Zhengxin, Z.* Stability of differential systems / Z. Zhengxin // Appl. Math., Ser. B (Engl. Ed.). – 2006. – Vol. 21, № 3. – P. 327–334.
9. *Zhengxin, Z.* On the reflective function of polynomial differential system / Z. Zhengxin // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – Vol. 278, № 1. – P. 18–26.
10. *Zhengxin, Z.* The nonlinear reflective function of differential system / Z. Zhengxin, Yu. Yuexin // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. – 2003. – Vol. 53, № 6 (A). – P. 733–741.
11. *Zhengxin, Z.* Poincare mapping and periodic solution for the nonlinear differential system / Z. Zhengxin, Yu. Yuanhong // J. Syst. Sci. Math. Sci. – 2006. – Vol. 26, № 1. – P. 59–68.
12. *Мироненко, В.И.* Возмущения систем, не изменяющие временных симметрий и отображения Пуанкаре / В.И. Мироненко, В.В. Мироненко // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1347–1352.
13. *Mironenko, V.I.* How to construct equivalent differential systems / V.I. Mironenko, V.V. Mironenko // Applied Mathematic Letters. – 2009. – Vol. 22. – P. 1356–1359.
14. *Красносельский, М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – Москва : Наука, 1966. – 332 с.

Поступила в редакцию 05.02.10.